

T.D. MÉCANIQUE QUANTIQUE

* Série 4 *

Exercice 1. Système conservatif - Mesure d'une observable

On considère un système physique dont l'espace des états à trois dimensions est rapporté à la base orthonormée $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle, |u_3\rangle\}$. Le hamiltonien H du système est tel que :

$$H |u_1\rangle = 2\hbar\omega |u_1\rangle ; H |u_2\rangle = 2\hbar\omega |u_2\rangle \text{ et } H |u_3\rangle = \hbar\omega |u_3\rangle \text{ avec } \omega \text{ réel positif}$$

Et, soit un A un opérateur hermitique agissant sur l'espace des états et est défini par :

$$A |u_1\rangle = a |u_2\rangle ; A |u_2\rangle = b |u_1\rangle \text{ et } A |u_3\rangle = 2a |u_3\rangle \text{ avec } a \text{ réel positif.}$$

$$\text{A } t=0, \text{ le système est décrit par le ket : } |\Psi_{t=0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} |u_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{3}} |u_2\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}} |u_3\rangle$$

- 1) Déterminer les valeurs propres, notées λ_k et les vecteurs propres, notés $|\varphi_k\rangle$, de A .
- 2) Quelles valeurs peut-on trouver et avec quelles probabilités lorsqu'on mesure l'énergie à l'instant $t=0$?
- 3) Déterminer le ket $|\Psi_t\rangle$ décrivant l'état du système à un instant t ultérieur? $|\Psi_t\rangle$ et $|\Psi_{t=0}\rangle$ décrivent-ils des états physiquement indiscernables? Justifier votre réponse.
- 4) a) A l'instant t , on mesure l'énergie, quels sont les résultats de la mesure et leur probabilité.
b) Même question pour la grandeur représentée par A .
c) Quelle est la probabilité de trouver le système à l'instant t dans l'état décrit par $|u_3\rangle$.
- 5) On suppose que le résultat d'une mesure de l'énergie à un instant t donne $2\hbar\omega$. Quel est l'état du système immédiatement après cette mesure ?
- 6) La grandeur représentée par A est-elle une constante de mouvement. Justifier votre réponse.

Exercice 2. Particule dans un champ magnétique

Dans un champ magnétique $\vec{B}$ (indépendant du temps) dérivant d'un potentiel vecteur $\vec{A}$ représentés respectivement par les observables $\vec{B}$ et $\vec{A}$, le hamiltonien d'une particule de masse m et de charge q s'écrit :

$$H(\vec{R}, \vec{P}) = \frac{1}{2m} [\vec{P} - q\vec{A}(\vec{R})]^2$$

Dans un tel champ, on sait que l'observable impulsion $\vec{P}$ est reliée à l'observable vitesse $\vec{V}$ par la relation : $\vec{P} = m\vec{V} + q\vec{A}$. Pour simplifier, nous supposons que $\vec{B}$ est uniforme et parallèle à l'axe Oz d'un repère cartésien Oxyz de telle sorte que les composantes de l'observable $\vec{A}$, s'écrivent : $A_x = 0$, $A_y = B.X$ et $A_z = 0$.

- 1) Calculer les commutateurs : $[V_x, V_y]$, $[V_y, V_z]$, $[V_z, V_x]$
puis les commutateurs : $[R_\alpha, V_\alpha]$ avec $\alpha = x, y, z$.
- 2) Rappeler le théorème de Heisenberg et montrer que $\Delta\alpha \cdot \Delta V_\alpha \geq \hbar/2m$; ($\alpha = x, y, z$). Interpréter.
- 3) En utilisant un résultat du cours que l'on précisera, calculer :
 - a) $\frac{d\langle \vec{r} \rangle}{dt}$; Commenter
 - b) $m \frac{d\langle \vec{v} \rangle}{dt}$; En déduire la relation vectorielle entre $\langle \vec{v} \rangle$ et $\vec{B}$. Commenter.

Exercice 3. Particule dans un champ électrique

Une particule de masse m et de charge q est plongée dans un champ électrique statique uniforme $\vec{E}$ parallèle à l'axe Oz (d'un repère cartésien Oxyz) ; son hamiltonien peut s'écrire :

$$H = \frac{p_z^2}{2m} - q \varepsilon Z$$

Particule libre $-q\varepsilon Z = 0$
 $\Rightarrow H = \frac{p^2}{2m}$

Montrer que :

- 1) la valeur moyenne $\langle p_z \rangle_t$ de l'impulsion varie linéairement avec le temps ;
 - 2) la valeur moyenne $\langle z \rangle_t$ de la position varie quadratiquement avec le temps.
- Commenter.

TD Mécanique Quantique
Série N° 4

Exercice 1 : Système conservatif - Mesure d'une observable :

$$H|v_1\rangle = 2\hbar\omega|v_1\rangle, \quad H|v_2\rangle = 2\hbar\omega|v_2\rangle, \quad H|v_3\rangle = \hbar\omega|v_3\rangle$$

$$\Rightarrow H = \hbar\omega \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A|v_1\rangle = a|v_2\rangle, \quad A|v_2\rangle = b|v_1\rangle, \quad A|v_3\rangle = ca|v_3\rangle$$

$$A \begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ca \end{pmatrix}_{\{|v_i\rangle\}}$$

A : hermitique

$$|\Psi_{t=0}\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|v_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{3}}|v_2\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}}|v_3\rangle$$

1°) A est hermitique $\Rightarrow A = A^\dagger$

$$a_{ij} = a_{ji}^* \Rightarrow a = b$$

$$\det(A - \lambda I) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = a & |\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|v_1\rangle + |v_2\rangle) \\ \lambda_2 = -a & |\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|v_1\rangle - |v_2\rangle) \\ \lambda_3 = ca & |\varphi_3\rangle = |v_3\rangle \end{cases}$$

2°/ Pour H

$$\lambda_1 = 2\hbar\omega \longrightarrow |v_1\rangle$$

$(2\hbar\omega)$ $\bar{V}_P$ double

$$\lambda_2 = 2\hbar\omega \longrightarrow |v_2\rangle$$

$\hbar\omega$ $\bar{V}_P$ simple

$$\lambda_3 = \hbar\omega \longrightarrow |v_3\rangle$$

Les résultats de mesure de H sont :

l'une des valeur propre de H $\lambda_1 = \lambda_2 = 2\hbar\omega$ ou $\lambda_3 = \hbar\omega$

$$\langle \Psi_{t=0} | \Psi_{t=0} \rangle = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

$|\Psi_{t=0}\rangle$ est normé

$$\mathcal{P}(2\hbar\omega) = |\langle u_1 | \Psi_{t=0} \rangle|^2 + |\langle u_2 | \Psi_{t=0} \rangle|^2$$

$$\mathcal{P}(1) = \langle \Psi_1 | \Psi_{t=0} \rangle^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\mathcal{P}(\hbar\omega) = |\langle u_3 | \Psi_{t=0} \rangle|^2 = \frac{1}{3}$$

$$\mathcal{P}(2\hbar\omega) + \mathcal{P}(\hbar\omega) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$$

3° Calcul de $|\Psi_t\rangle$:

Comme le système est conservatif

$$|\Psi_t\rangle = e^{\frac{-iHt}{\hbar}} |\Psi_{t=0}\rangle$$

avec $e^{\frac{-iHt}{\hbar}}$ terme à phase près

Les états $|\Psi_t\rangle$ et $|\Psi_{t=0}\rangle$ sont physiquement indiscernables (on ne peut pas les séparer).

On applique le postulat ⑥

$$|\Psi_t\rangle = \sum_n C_n(t_0) e^{\frac{-iE_n(t-t_0)}{\hbar}} |\Psi_n\rangle \quad \text{où } t_0 = 0$$

$$|\Psi_t\rangle = \sum_n C_n(0) e^{\frac{-iE_n t}{\hbar}} |\Psi_n\rangle$$

$(E_n, |\Psi_n\rangle)$: $\vec{v}_p$ et $\vec{V}_p$ de H

$$C_n(0) = \langle \Psi_n | \Psi_{t=0} \rangle$$

$$C_1(0) = \langle u_1 | \Psi_{t=0} \rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$C_2(0) = \langle u_2 | \Psi_{t=0} \rangle = -\frac{i}{\sqrt{3}}$$

$$C_3(0) = \langle u_3 | \Psi_{t=0} \rangle = \frac{i}{\sqrt{3}}$$

$$|\Psi_t\rangle = C_1(0) e^{-\frac{2i\hbar\omega t}{\hbar}} |v_1\rangle + C_2(0) e^{-\frac{2i\hbar\omega t}{\hbar}} |v_2\rangle + C_3(0) e^{-\frac{i\hbar\omega t}{\hbar}} |v_3\rangle$$

$$|\Psi_t\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\omega t} |v_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{3}} e^{-2i\omega t} |v_2\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}} e^{-i\omega t} |v_3\rangle$$

4° à t , on mesure H , Comme le système est conservatif, on trouvera l'une des $\bar{v}_p$ de H : $2\hbar\omega$ ou $\hbar\omega$

$$\mathcal{P}(2\hbar\omega) = |\langle v_1 | \Psi_t \rangle|^2 + |\langle v_2 | \Psi_t \rangle|^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = C_1^2(t) + C_2^2(t)$$

$$\mathcal{P}(\hbar\omega) = |\langle v_3 | \Psi_t \rangle|^2 = \frac{1}{3} = C_3^2(t)$$

$$C_1(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-2i\omega t}$$

$$C_2(t) = \frac{-i}{\sqrt{3}} e^{-2i\omega t}$$

$$C_3(t) = \frac{i}{\sqrt{3}} e^{-i\omega t}$$

$$\mathcal{P}_{t=0} = \sum_n |C_n(0)|^2$$

$$\mathcal{P}_t = \sum_n |C_n(t)|^2$$

b) Resultat de mesure de A

Les résultats de mesure sont l'une des valeurs propres de A : a , $-a$ ou $2a$

$$|\Psi_t\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\omega t} |u_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{3}} e^{-i\omega t} |u_2\rangle + \frac{i}{\sqrt{3}} e^{-i\omega t} |u_3\rangle$$

$$C_1(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} e^{-i\omega t}, \quad C_2(t) = \frac{-i}{\sqrt{3}} e^{-i\omega t}, \quad C_3(t) = \frac{i}{\sqrt{3}} e^{-i\omega t}$$

$$|\Psi_t\rangle = C_1(t) |u_1\rangle + C_2(t) |u_2\rangle + C_3(t) |u_3\rangle$$

$$\lambda = a \longrightarrow |\varphi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u_1\rangle + |u_2\rangle)$$

$$\lambda = -a \longrightarrow |\varphi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u_1\rangle - |u_2\rangle)$$

$$\lambda = 2a \longrightarrow |\varphi_3\rangle = |u_3\rangle$$

$$\mathcal{P}_t(a) = |\langle \varphi_1 | \Psi_t \rangle|^2 = \frac{1}{2} (C_1^2(t) + C_2^2(t)) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

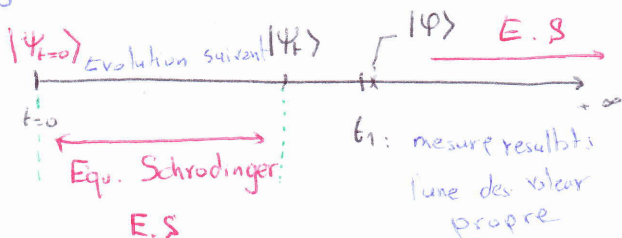
$$\mathcal{P}_t(-a) = |\langle \varphi_2 | \Psi_t \rangle|^2 = \frac{1}{2} (C_1^2(t) + C_2^2(t)) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{3}$$

$$\mathcal{P}_t(2a) = |\langle \varphi_3 | \Psi_t \rangle|^2 = C_3^2(t) = \frac{1}{3}$$

c) Probabilité de trouver le système à l'instant t décrit par $|u_3\rangle$.

$$\mathcal{P} = |\langle u_3 | \Psi_t \rangle|^2 = C_3^2(t) = \frac{1}{3}$$

5° On suppose que le résultat de mesure du système à t est $2\hbar\omega$, calculer $|\varphi_t\rangle$ juste après cette mesure.



$$|\varphi\rangle = \frac{P|\Psi_t\rangle}{\sqrt{\langle \Psi_t | P | \Psi_t \rangle}}$$

P : opérateur projecteur

$\lambda = 2\hbar\omega$ est une V_p double de H

$$\hbar = 2\hbar\omega \begin{cases} |u_1\rangle \\ |u_2\rangle \end{cases}$$

$$P_1 = |u_1\rangle\langle u_1| + |u_2\rangle\langle u_2|$$

$$P_2 = \sum_i |u_i\rangle\langle u_i|$$

$$|\psi_t\rangle = C_1(t)|u_1\rangle + C_2(t)|u_2\rangle + C_3(t)|u_3\rangle$$

$$\textcircled{P} P|\psi_t\rangle = C_1(t)|u_1\rangle + C_2(t)|u_2\rangle$$

$$\langle\psi_t|P|\psi_t\rangle = C_1^*(t)C_1(t) + C_2^*(t)C_2(t) = C_1^2(t) + C_2^2(t) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$|\varphi_t\rangle = \frac{P|\psi_t\rangle}{\sqrt{\langle\psi_t|P|\psi_t\rangle}} = \frac{C_1(t)|u_1\rangle + C_2(t)|u_2\rangle}{\sqrt{C_1^2(t) + C_2^2(t)}} \quad \varphi \text{ normé}$$

$$= \frac{\frac{e^{-2i\omega t}}{\sqrt{3}}(|u_1\rangle - i|u_2\rangle)}{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}} = \frac{e^{-2i\omega t}}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle - i|u_2\rangle) = \varphi$$

= un terme de phase près

$$\langle\varphi_t|\varphi_t\rangle = 1$$

6) Constante de mouvement,

Pour que A soit une constante ~~de~~ de mouvement, il faut :

$$[A, H] = 0$$

$$\left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle = 0 \quad A \text{ ne dépend pas explicitement du temps}$$

Par hypothèse, A ne dépend pas des temps $\left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle = 0$, reste à prouver que $[A, H] = 0$

$$AH = HA \quad \text{car } H \text{ est diagonale} \quad (\text{faire le produit des matrices})$$

$$HA = \hbar\omega a \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \hbar\omega a \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$AH = \hbar\omega a \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \hbar\omega a \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$[A, H] = 0$$

A : constante de mouvement

$$\frac{d \langle A \rangle_t}{dt} = 0$$

C'est le th d'Enthrenerfert

$$\frac{d \langle A \rangle_t}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$

~~II - Particule dans~~

Exercice 2: Particule dans un champ magnétique $\vec{B}$:

$$H(\vec{R}, \vec{P}) = \frac{1}{2m} [\vec{P} - q\vec{A}(\vec{R})]^2$$

$$\vec{P} = m\vec{V} + q\vec{A} \Rightarrow m\vec{V} = \vec{P} - q\vec{A} \Rightarrow \vec{V} = \frac{\vec{P} - q\vec{A}}{m}$$

$$H(\vec{R}, \vec{P}) = \frac{1}{2m} m^2 \vec{V}^2 = \frac{1}{2} m \vec{V}^2 \quad H \text{ est reduit } \hat{=} \text{ son energie cinétique.}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ Bx \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{P} \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} \Rightarrow V \begin{pmatrix} V_x = \frac{P_x}{m} \\ V_y = \frac{P_y}{m} - \frac{qB}{m} x \\ V_z = \frac{P_z}{m} \end{pmatrix}$$

$$\bullet [V_x, V_y] = \left[\frac{P_x}{m}, \frac{P_y}{m} - \frac{qBx}{m} \right]$$

$$= \frac{1}{m^2} [P_x, P_y] - \frac{qB}{m^2} [P_x, x]$$

$$= \frac{qB}{m^2} i\hbar$$

$$[V_x, V_y] = \frac{i\hbar qB}{m^2} \pi$$

$$\bullet [V_y, V_z] = \left[\frac{P_y}{m} - \frac{qBx}{m}, \frac{P_z}{m} \right] = \frac{1}{m^2} [P_y, P_z] - \frac{qB}{m^2} [x, P_z] = 0$$

$$\bullet [V_z, V_x] = \left[\frac{P_z}{m}, \frac{P_x}{m} \right] = \frac{1}{m^2} [P_z, P_x] = 0$$

Calcule de $[R_\alpha, V_\alpha]$ $\alpha = x, y, z$

$$[X, V_x] = \left[X, \frac{p_x}{m} \right] = + \frac{i\hbar}{m} \mathbb{1}$$

$$[Y, V_y] = \left[Y, \frac{p_y}{m} - \frac{qB}{m} X \right] = + \frac{i\hbar}{m} \mathbb{1}$$

$$[Z, V_z] = \left[Z, \frac{p_z}{m} \right] = + \frac{i\hbar}{m} \mathbb{1}$$

2° Théorème de Heisenberg:

Soit deux grandeurs $\mathcal{C}$ et $\mathcal{P}$ associées à deux observables C et D

$$\Delta \mathcal{C} \Delta \mathcal{D} \geq \frac{1}{2} |\langle [C, D] \rangle|$$

En déduire $\Delta x \Delta V_x \geq \frac{\hbar}{2m}$

$$C = X, Y, Z$$

$$D = V_x, V_y, V_z$$

$$\Delta x \Delta V_x \geq \frac{1}{2} |\langle [X, V_x] \rangle| =$$

$$\bullet \quad \boxed{\Delta x \Delta V_x \geq \frac{\hbar}{2m}}$$

$$\Delta y \Delta V_y \geq \frac{1}{2} |\langle [Y, V_y] \rangle|$$

$$\bullet \quad \boxed{\Delta y \Delta V_y \geq \frac{\hbar}{2m}}$$

$$\Delta z \Delta V_z \geq \frac{1}{2} |\langle [Z, V_z] \rangle|$$

$$\bullet \quad \boxed{\Delta z \Delta V_z \geq \frac{\hbar}{2m}}$$

avec $\vec{p} = m \vec{V}$

$$\Delta x \Delta p_x = m \Delta x \Delta V_x \geq \frac{\hbar}{2m} \times m = \frac{\hbar}{2}$$

$$\Rightarrow \Delta x \geq \frac{\hbar}{2 \Delta p_x}$$

3°

$$a/ \frac{d\langle \vec{r} \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [\vec{r}, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right\rangle$$

$$\frac{d\langle \vec{r} \rangle}{dt} \longrightarrow \text{vitesse}$$

$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ les observable ne dépendent pas explicitement du temps $\leq \left\langle \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right\rangle = 0$

le théorème est réduit à :

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [x, H] \rangle$$

$$H = \begin{pmatrix} \frac{m}{2} V_x^2 \\ \frac{m}{2} V_y^2 \\ \frac{m}{2} V_z^2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{m}{2i\hbar} \langle [x, V_x^2] \rangle$$

$$[x, V_x^2] = [x, V_x] V_x + V_x [x, V_x] = \frac{i\hbar}{m} V_x + \frac{i\hbar}{m} V_x = \frac{2i\hbar}{m} V_x$$

$$\frac{d\langle x \rangle}{dt} = \frac{m}{2i\hbar} \times \frac{2i\hbar}{m} V_x$$

$$\boxed{\frac{d\langle x \rangle}{dt} = V_x}$$

même chose pour y et z

$$\boxed{\frac{d\langle y \rangle}{dt} = V_y}$$

$$\boxed{\frac{d\langle z \rangle}{dt} = V_z}$$

b b/

$$m \frac{d\langle v \rangle}{dt} \longrightarrow \text{force} \sim q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$\begin{aligned} \frac{d\langle V_x \rangle}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} \langle [V_x, H] \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [V_x, \frac{m}{2} V_x^2] \rangle = \frac{m}{2i\hbar} \langle [V_x, V_x^2] \rangle \\ &= \frac{1}{i\hbar} \langle [V_x, \frac{m}{2} (V_x^2 + V_y^2 + V_z^2)] \rangle \\ &= \frac{m}{2i\hbar} \left(\langle [V_x, V_x^2] \rangle + \langle [V_x, V_y^2] \rangle + \langle [V_x, V_z^2] \rangle \right) \end{aligned}$$

$$[V_x, V_x^2] = 0$$

$$[V_x, V_y^2] = V_y [V_x, V_y] + [V_x, V_y] V_y = \frac{2i\hbar qB}{m^2} V_y$$

$$\langle [V_x, V_y^2] \rangle = \frac{2i\hbar qB}{m^2} \langle V_y \rangle$$

$$[V_x, V_z^2] = V_z [V_x, V_z] + [V_x, V_z] V_z = 0 + 0 = 0$$

$$\frac{d\langle V_x \rangle}{dt} = \frac{m}{i\hbar} \frac{2i\hbar qB}{2m^2} \langle V_y \rangle = \frac{qB}{m} \langle V_y \rangle$$

$$\Rightarrow m \frac{d\langle V_x \rangle}{dt} = qB \langle V_y \rangle$$

$$m \frac{d\langle V_y \rangle}{dt} = -qB \langle V_x \rangle$$

$$m \frac{d\langle V_z \rangle}{dt} = 0$$

$$q \vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} qV_y B \\ -qV_x B \\ 0 \end{vmatrix}$$

Composante
↳ force

$$F \begin{cases} \langle F_x \rangle = m \frac{d\langle V_x \rangle}{dt} = qB \langle V_y \rangle \\ \langle F_y \rangle = m \frac{d\langle V_y \rangle}{dt} = -qB \langle V_x \rangle \\ \langle F_z \rangle = m \frac{d\langle V_z \rangle}{dt} = 0 \end{cases}$$

Exercice 3 :

Particule libre

$$H = \frac{p^2}{2m}$$

champ elec $H = \frac{p_z^2}{2m} - q\epsilon Z$

champ magnetique $\vec{p} = m\vec{v} + q\vec{A}$

$$H = \frac{p_z^2}{2m} - q\epsilon Z$$

1°

$$\text{On a } \frac{d\langle A \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{dA}{dt} \right\rangle$$

$$A = p_z : \left\langle \frac{dp_z}{dt} \right\rangle = 0$$

$$\frac{d\langle p_z \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [p_z, H] \rangle \quad \text{avec } H = \frac{p_z^2}{2m} - q\epsilon Z$$

$$\text{or } [p_z, H] = \underbrace{[p_z, \frac{p_z^2}{2m}]}_{=0} + [p_z, -q\epsilon Z]$$

$$= -q\epsilon [p_z, Z]$$

$$= -q\epsilon (-i\hbar \mathbb{1}) = q\epsilon i\hbar \mathbb{1}$$

$$\frac{d\langle p_z \rangle}{dt} = q\epsilon \langle \mathbb{1} \rangle = q\epsilon \mathbb{1}$$

j'integre $\boxed{\langle p_z \rangle = q\epsilon t + \langle p_{z0} \rangle}$

En generale

$$[A, F(A)] = 0$$

$$\bullet [A, B^n] = n[A, B] \frac{dB}{dA}$$

$$\bullet [A, BC] = B[A, C] + [A, B]C$$

2°

$$A = z \Rightarrow A = Z$$

$$\frac{d\langle z \rangle}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \langle [Z, H] \rangle + \left\langle \frac{dz}{dt} \right\rangle$$

$$[Z, H] = \underbrace{[Z, \frac{p_z^2}{2m}]}_{=0} + [Z, -q\epsilon Z]$$

$$\begin{aligned} \text{avec } [Z, p_z^2] &= [Z, p_z p_z] = p_z [Z, p_z] + [Z, p_z] p_z = p_z i\hbar \mathbb{1} + i\hbar \mathbb{1} p_z \\ &= 2i\hbar p_z \end{aligned}$$

$$\frac{d\langle z \rangle}{dt} = \left\langle \frac{p_z}{m} \right\rangle \quad \text{or} \quad \langle p_z \rangle = qEt + \langle p_{z0} \rangle_{t=0}$$

$$\boxed{\langle z \rangle = \frac{qE}{2m} t^2 + \left\langle \frac{p_{z0}}{m} \right\rangle t + \langle z_0 \rangle_{t=0}}$$

$$z(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 + v_0 t + z_0 \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{qE}{m}$$